التمرين الأول:

06.5 نقاط

يحتوي صندوق u_1 على أربع كرات بيضاء وثلاث كرات سوداء وكرتين حمراوين . لايمكن التمييز بينها باللمس

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من u_1 ولتكن الأحداث :

A " سحب كرتين سوداوين وكرة حمراء " ، B " سحب ثلاث كرات من نفس اللّون " ، C " سحب كرة بيضاء واحدة على الأقل'

1) بيّن أنّ : $P(A) = \frac{1}{14}$ ثمّ أحسب $P(B)$ و $P(C)$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الألوان التي تحملها الكرات المسحوبة

أ/ حدّد قيم المتغير العشوائي X

ب/ حدّد قانون الاحتمال للمتغيّر المتغير العشوائي X

جـ/ اللاعب يدفع $50DA$ قبل إجراء السحب، ويكسب$25DA$ لكل لون من الألوان المحصل عليها .هل اللعبة مربحة له ؟

4) نعتبر صندوقا آخر u_2 يحتوي على كرتين بيضاوين وكرة سوداء

نضع الكرات الثلاثة المسحوبة من u_1 في الصندوق u_2 ثم نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من u_2

* ما احتمال أنّ الكرتان المسحوبتان من u_2 بيضاوين علما أنّ الكرات الثلاث المسحوبة من u_1 لها نفس اللون

التمرين الثاني

المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط A ;B وC التي لواحقها على الترتيب:

06.5 نقاط

$$z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ ،} \quad z_B = -(i)^{2019} z_A \quad \text{و} \quad z_C = \overline{z_A} \quad (\overline{z_A} \text{ مرافق } z_A)$$

1) أكتب z_B, z_A على الشكل الجبري .

2) أكتب العدد $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

3) أ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $\frac{1+i-z}{-1+i-z} = 2e^{i\pi}$ $(E)....$

ب) استنتج أن النقطة A هي صورة النقطة B بواسطة تشابه مباشر S مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة z_Ω

(حيث z_Ω هي حل المعادلة (E)) يطلب تعيين عناصره المميزة وكتابة عبارته المركبة .

4) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا موجبا.

5) أ) عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوى ذات اللاحقة z حيث: $z = z_C - k\frac{z_A}{z_C}$ ، k يمسح $\mathcal{R}_+^*$

ب) عيّن (Γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى حيث: $arg\left[\left(\frac{z_A - z}{z_B - z}\right)^2\right] = \pi + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$

التمرين الثالث

06.5 نقاط

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس

1- عين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0; -3)$ مماسا معامل توجيهه 3 والعدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x) = 0$.

2- نضع $c = -3, b = 0, a = 1$

أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

3- أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$ ثم عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

4- أرسم (T) و (C_f) .

5- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن $f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

6- عيّن (بيانيا) قيم العدد الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $x^2 - 3 + me^x = 0$ حلّين سالبين.

التمرين الاول:

1) تبيين أنّ : $P(A)=\frac{1}{14}$ ، لدينا $p(A)=\frac{C_3^2\times C_2^1}{C_9^3}=\frac{6}{84}=\frac{1}{14}$ 0.5

$p(B)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{5}{84}\approx 0.06$، 01

الحدث C : سحب كرة بيضاء على الأقل الحدث $\overline{C}$: عدم سحب كرة بيضاء 01

ط1: $p(C)=1-p(\overline{C})=1-\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{74}{84}\approx 0.88$ ط2: $p(C)=\frac{C_4^1\times C_5^2+C_4^2\times C_5^1+C_4^3\times C_5^0}{C_9^3}=\frac{74}{84}\approx 0.88$

2)أ) قيم المتغير العشوائي X هي : $1\ ;\ 2\ ;\ 3$ 0.5

ب/ $X=1$: " سحب 3 كرات بلون واحد " $p(X=1)=p(B)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{5}{84}$ 0.5

$X=2$: " سحب 3 كرات بلونين مختلفين " 0.5

$(B;B;\overline{B})$ أو $(N;N;\overline{N})$ أو $(R;R;\overline{R})$ $p(X=2)=\frac{C_4^2\times C_5^1+C_3^2\times C_6^1+C_2^2\times C_7^1}{C_9^3}=\frac{55}{84}$

$X=3$: " سحب 3 كرات بثلاث ألوان مختلفة " $p(X=3)=\frac{C_4^1\times C_3^1\times C_2^1}{C_9^3}=\frac{24}{84}$ 0.5

ج) ليكن Y متغير عشوائي يمثل الربح الصافي الذي يحققه اللاعب قيمه : $+25\ ;\ 0\ ;\ -25$.

$E(Y)=-25\left(\frac{5}{84}\right)+0\left(\frac{55}{84}\right)+25\left(\frac{24}{84}\right)=\frac{475}{84}\approx 5.65$ بماأن : $E(Y)\succ 0$ فإن اللعبة مربحة لهذا اللاعب 1.25

3) حساب احتمال ان تكون الكرتان من U_2 بيضاوين علما أن الكرات المسحوبة من لها نفس اللون:

ليكن الحدث F: سحب كرتان من U_2 بيضاوين ، لدينا: $p_B(F)=\frac{p(B\cap F)}{p(B)}$ ، $p(B)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{5}{84}$ 0.75

$p(B\cap F)=\frac{C_4^3}{84}\times\frac{C_5^2}{C_6^2}+\frac{C_3^3}{84}\times\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{41}{1260}$ ، ومنه: $p_B(F)=\frac{p(B\cap F)}{p(B)}=\frac{\frac{41}{1260}}{\frac{5}{84}}=\frac{41}{75}\approx 0.55$

التمرين الثاني:

1) كتابة z_A، z_B على الشكل الجبري: $z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=1+i$، $z_B=-(i)^{2019}z_A=iz_A=-1+i$ 0.75 0.75

2) $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=i$ الاستنتاج : بما أن $arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}$ و $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1$ 01

فإن $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$ و $AB=AC=2$ اذن المثلث ABC قائم في A ومتقايس الضلعين

3) أ) نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z :

(E) يكافئ $\frac{1+i-z}{-1+i-z}=2(-1)$ يكافئ $3z=-1+3i$ ومنه: $z=\frac{-1}{3}+i$ اذن: $S=\left\{\frac{-1}{3}+i\right\}$ 0.75

ب) استنتاج أن A هي صورة B بواسطة تشابه مباشر S مركزه النقطة Ω لاحقتها $z_\Omega=\frac{-1}{3}+i$: من (E) نستنتج $\frac{z_A-z_\Omega}{z_B-z_\Omega}=2e^{i\pi}$

ومنه: $z_A-z_\Omega=2e^{i\pi}(z_B-z_\Omega)$ العبارة من الشكل $z_A-z_\Omega=ke^{i\theta}(z_B-z_\Omega)$ معناه $S(B)=A$ حيث S تشابه مباشر 0.5

نسبته $k=2$ وزاويته $\theta=\pi$ ومركزه النقطة الصامدة Ω لاحقتها $z_\Omega=\frac{-1}{3}+i$. عبارته المركبة : $z'=-2z-1+3i$ 0.5

حالة خاصة: S هو تحاك مركزه النقطة Ω ونسبته $K=-2$

4) تعيّين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا موجبا: $\frac{z_A}{z_C}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}}}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ 0.75

$\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n=e^{i\,n\frac{\pi}{2}}$ عدد حقيقي موجب يكافئ $\frac{n\pi}{2}=2k\pi$ ومنه: $n=4k$ حيث $k\in\mathbb{N}$.

5) أ) تعيّين (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى حيث: $z=z_C-k\frac{z_A}{z_C}$ ، k يمسح $\mathcal{R}_+^*$:

$z=z_C-k\frac{z_A}{z_C}$ أي $z-z_C=-k\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$ أي $z-z_C=k\left(-e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$ أي $z-z_C=k\left(e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}\right)=k\left(e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)}\right)$ 0.75

$|z-z_C|=k$ و $arg\,(z-z_C)=\frac{3\pi}{2}$

ومنه: (Γ) هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة C موازي لحامل محور التراتيب شعاع توجيهه لاحقته $e^{i\frac{3\pi}{2}}=-i$. (باستثناء C)

0.75 ب) تعيّن (Γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى حيث: $arg\left[\left(\frac{z_A-z}{z_B-z}\right)^2\right]=\pi+2k\pi$ ....(1)، $k\in\mathbb{Z}$ (1) يكافئ

$2\,arg\left(\frac{z_A-z}{z_B-z}\right)=\pi+2k\pi$ يكافئ $arg\left(\frac{z_A-z}{z_B-z}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ومنه: (Γ') هي دائرة قطرها $[AB]$ ماعدا النقطتين $A;B$

التمرين الثالث:

-1 تعيين الأعداد الحقيقية a ;b وc : $f(0)=-3$ و هذا يعني $c=-3$

0.75 و لدينا $f'(x)=(2ax+b)e^{-x}-(ax^2+bx+c)e^{-x}=[-ax^2+(2a-b)x+b-c]e^{-x}$

$f'(0)=3$ يعني أن $b-c=3$; و منه $b=0$ ، $f(\sqrt{3})=0$ يعني ان $f(\sqrt{3})=(3a-3)e^{-\sqrt{3}}=0$ و منه $a=1$

-2 نضع $a=1, b=0, c=-3$ تصبح $f(x)=(x^2-3)e^{-x}$

0.5 حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2-3)e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ لأنه بوضع $x=2t$ نجد $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4t^2}{e^{2t}}\right]=$

0.5 $4\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{e^t}\right)^2=0$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2)e^{-x}=+\infty$

0.5 دراسة اتجاه تغير الدالة f : المشتقة: $f'(x)=(-x^2+2x+3)e^{-x}$ إشارتها من إشارة $(-x^2+2x+3)$ تنعدم عند العددين

-1 و3 و منه f متناقصة على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[3;+\infty[$ متزايدة على المجال $[-1;3]$

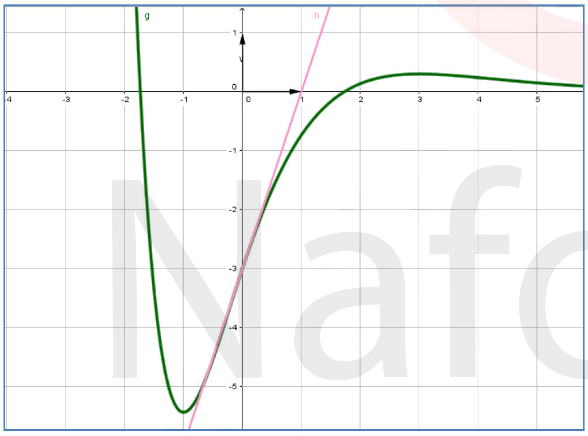
و شكل جدول تغيراتها :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-2e$	↗	$\frac{6}{e^3}$	↘	0

0.5 -3 معادلة المماس (T) هي $y=3x-3$

0.5 تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

0.5 $f(x)=0$ يكافئ $x^2-3=0$. اي ان $x=\sqrt{3}$ او $x=-\sqrt{3}$ نقطتي التقاطع هما $B(\sqrt{3};0)$ و $C(-\sqrt{3};0)$



0.25 -4 رسم (T) و (C_f)

0.5+ -5 تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن

$f(x)+2f'(x)+f''(x)=2e^{-x}$

$f(x)=(x^2-3)e^{-x}$

و $f'(x)=(-x^2+2x+3)e^{-x}$

$f''(x)=(-2x+2)e^{-x}+(x^2-2x-3)e^{-x}$

أي ان $f''(x)=(x^2-4x-1)e^{-x}$

0.75 و منه $f(x)+2f'(x)+f''(x)=(x^2-3-2x^2+4x+6+x^2-4x-1)e^{-x}=2e^{-x}$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

0.75 $f(x)+2f'(x)+f''(x)=2e^{-x}$ يكافئ $f(x)=-2f'(x)-f''(x)+2e^{-x}$ و منه الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F

حيث $F(x)=-2f(x)-f'(x)-2e^{-x}$ أي $F(x)=-2(x^2-3)e^{-x}-(-x^2+2x+3)e^{-x}-2e^{-x}$ أي

$F(x)=(-2x^2+6)e^{-x}+(x^2-2x-3)e^{-x}-2e^{-x}$ و منه $F(x)=(-x^2-2x+1)e^{-x}$

-6 تعيين قيم العدد الحقيقي m : المعادلة تكافئ $me^{x}=-(x^2-3)$ أي ان $-m=(x^2-3)e^{-x}$ يكافئ $f(x)=-m$

0.5 لما $-3>-m>-2e$ أي ان $3<m<2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلاتهما سالبان ومنه للمعادلة حلين سالبين